Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 1. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Sei X eine Menge und seien $M, N, P \subset X$ Teilmengen.

(a) Zeige: $M \subset M \cup N$.

(b) Zeige: $(M \cap N) \subset M$.

(c) Zeige: $M \cup N = N \cup M$.

(d) Zeige: $M \cap N = N \cap M$.

(e) Gilt $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$?

(f) Gilt $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$?

(g) Wann stimmen die Teilmengen $N \times M$ und $M \times N$ von $X \times X$ überein?

(h) Wann gilt $M \setminus N = N \setminus M$?

Aufgabe 2. (a) Zeige dass $\mathbb{N}$ abzählbar ist.

(b) Zeige dass $\mathbb{Z}$ abzählbar ist.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige dass $\mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ abzählbar ist.

Aufgabe 3. Seien $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ Abbildungen von Mengen. Man zeige oder widerlege mit einem Gegenbeispiel:

(a) $g \circ f$ injektiv $\quad\Rightarrow\quad$ f injektiv.

(b) $g \circ f$ injektiv $\quad\Rightarrow\quad$ g injektiv.

(c) $g \circ f$ surjektiv $\quad\Rightarrow\quad$ f surjektiv.

(d) $g \circ f$ surjektiv $\quad\Rightarrow\quad$ g surjektiv.

(e) g und f injektiv $\quad\Rightarrow\quad$ $g \circ f$ injektiv.

(f) g und f surjektiv $\quad\Rightarrow\quad$ $g \circ f$ surjektiv.

Bitte wenden.

Aufgabe 4. Sei M eine endliche Menge und sei $f : M \longrightarrow M$ eine injektive Abbildung.

(a) Zeige dass f bijektiv ist.

(b) Zeige dass es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt mit

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-mal} = \mathrm{id}\,.$$

(c) Bleiben Teil (a) und (b) richtig falls M eine unendliche Menge ist?

Aufgabe 5. Für eine natürliche Zahl n, betrachte die Teilmenge $[n] := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ von $\mathbb{N}$. Man zeige, dass für beliebige natürliche Zahen m und n gilt:

(a) $n \leq m \quad \Leftrightarrow \quad [n] \subset [m]$.

(b) $n \leq m \quad \Leftrightarrow \quad [n] \cap [m] = [n]$.

(c) $n \leq m \quad \Leftrightarrow \quad [n] \cup [m] = [m]$.

(d) $[n] \times [n]$ und $[(n + 1)^2 - 1]$ sind gleichmächtig.

Aufgabe 6. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen M und N.

(a) Zeige dass f genau dann injektiv ist, wenn für jede Menge P und für beliebige Abbildungen $g, g' : P \longrightarrow M$ gilt:

$$f \circ g = f \circ g' \quad \Rightarrow \quad g = g'.$$

(b) Zeige dass f genau dann surjektiv ist, wenn für jede Menge P und für beliebige Abbildungen $g, g' : N \longrightarrow P$ gilt:

$$g \circ f = g' \circ f \quad \Rightarrow \quad g = g'.$$